



## STOCHASTINIS EURISTINIO METODO TAISYKLĖS PENSIJOS PORTFELIO SUDĖČIAI NUSTATYTI OPTIMIZAVIMAS

Aušra Klimavičienė

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva*  
*El. paštas [ausra\\_klimaviciene@yahoo.com](mailto:ausra_klimaviciene@yahoo.com)*

*Įteikta 2010-08-18; priimta 2010-10-02*

**Santrauka.** Straipsnyje nagrinėjama optimalaus pensijos portfelio sudarymo problema. Analizuojama galimybė pritaikyti plačiai žinomą euristinį metodą – 100 minus investuotojo amžius akcijose taisyklę – tvariam pensijos portfeliui sudaryti. Dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo ir stochastinio optimizavimo būdu optimizuojama euristinio metodo taisyklė, pagal kurią randama optimali „100“ alternatyva. Siekiant kuo tiksliau atspindėti realybės neapibrėžtumą, modelyje stochastiniai kintamieji yra ne tik akcijų ir obligacijų grąža, bet ir asmens gyvenimo trukmė. Pateikiamas naujas – pakoreguotas euristinis metodas – pensijos portfeliui sudaryti ir pagrindžiamas jo pranašumas.

**Reikšminiai žodžiai:** euristinis metodas, pensijos portfelis, stochastinė gyvenimo trukmė, stochastinis optimizavimas, portfelio pakeičiojimo tikimybė, portfelio tvarumas.

## STOCHASTIC OPTIMIZATION OF HEURISTIC METHOD RULE TO DETERMINE ASSET ALLOCATION TO RETIREMENT PORTFOLIO

Aušra Klimavičienė

*Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva*  
*E-mail: [ausra\\_klimaviciene@yahoo.com](mailto:ausra_klimaviciene@yahoo.com)*

*Received 18 August 2010; accepted 2 October 2010*

**Abstract.** The article examines the problem of determining asset allocation to sustainable retirement portfolio. The article attempts to apply heuristic method – 100 minus age in stocks rule – to determine asset allocation to sustainable retirement portfolio. Using dynamic stochastic simulation and stochastic optimization techniques the optimization of heuristic method rule is presented and the optimal alternative to „100“ is found. Seeking to reflect the stochastic nature of stock and bond returns and the human lifespan, the dynamic stochastic simulation models incorporate both the stochastic returns and the probability of living another year based on Lithuania's population mortality tables. The article presents the new method – adjusted heuristic method – to be used to determine asset allocation to retirement portfolio and highlights its advantages.

**Keywords:** heuristic method, retirement portfolio, stochastic lifespan, stochastic optimization, probability of retirement portfolio ruin, portfolio sustainability.

## 1. Įvadas

Efektyvus finansinio turto valdymas pensijos laikotarpiu tampa vis aktualesnis visame pasaulyje. Mokslininkų dėmesys šiai sričiai nuolat auga, tačiau vis dar nėra aiškios optimalaus ir tvaraus pensijos portfelio sudarymo metodikos. Tobulėjančios skaičiavimo technologijos ir dinaminio imitacinio modeliavimo galimybės sudaro sąlygas patikrinti įvairias investavimo strategijas, taikomas ilgą laikotarpį, pavyzdžiui, visą pensijos laikotarpį. Šiame straipsnyje ieškoma alternatyvių pensijos portfelio sudarymo metodų, efektyvesnių už šiandien žinomus. Straipsnyje sujungiamos tradicijos ir naujausios technologijos: tradicinis euristinis metodas, kuriuo nustatoma akcijų dalis portfelyje, iš 100 atėmus investuotojo amžių, ir dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo bei stochastinio optimizavimo technologija.

Šio straipsnio tikslas – stochastiškai optimizuojant euristinio metodo taisyklę, pritaikyti euristinį metodą pensijos portfeliui sudaryti, įvertinant stochastinę asmens gyvenimo trukmės ir rinkų grąžos prigimtį.

## 2. Optimalaus pensijos portfelio paieškos

Pensijos portfelio tvarumo problemai skirta nemažai mokslinių tyrimų, tačiau dauguma jų siekia nustatyti ne optimalią portfelio sudėtį, o didžiausią galimą kasmet iš portfelio išimti sumą. Mažai autorių analizavo pensijos portfelio tvarumą esant tikimybinei asmens gyvenimo trukmei, dar mažiau mokslininkų tyrė optimalią portfelio sudėtį ir jos nustatymo metodus. Dauguma ankstesnių tyrimų analizavo nuolatinį planuojamą pensijos laikotarpį. Tarp tokių paminėtini Bengen (1994, 1996, 2001), Cooley *et al.* (1998, 1999, 2001, 2003), Ameriks *et al.* (2001), Weiss (2001), Terry (2003), Tezel (2004), Spitzer *et al.* (2007) ir kiti. Dauguma šių autorių nesiekė apskaičiuoti optimalios pensijos portfelio sudėties, o analizavo keletą išėmimo normų ir hipotetinių portfelių sudėčių derinių.

Stochastinę asmens gyvenimo trukmę įvertino ir į stochastinius modelius įtraukė keletas mokslininkų: Ho *et al.* (1994), Milevsky, Robinson (1997, 2005), Stout ir Mitchell (2006), Stout (2008), Mitchell (2009). Pavyzdžiui, Stout (2008) optimalios portfelio sudėties problemai pritaikė stochastinio optimizavimo algoritmą, siekdamas minimizuoti portfelio pereikvojimo tikimybę per asmens gyvenimą, kurio trukmė yra stochastinis dydis, o tikimybė išgyventi dar vienerius metus gali būti aprašyta naudojant binominį skirstinį. Portfelio pereikvojimo tikimybė ir akcijų dalis portfelyje didėja didinant išėmimo normą ir, atvirkščiai, kuo vyresnis asmuo išeina į pensiją, tuo akcijų dalis portfelyje ir portfelio pereikvojimo tikimybė mažesnė.

Apžvelgus šių ir kitų autorių tyrimų rezultatus, galima daryti išvadą, kad nėra bendros pensijos portfelio sudarymo ir valdymo metodikos.

Euristinio metodo taisyklės pensijos portfeliui sudaryti, autorės turimomis žiniomis, iki šiol niekas nebandė naudojantis dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo galimybėmis stochastiškai optimizuoti.

## 3. Euristinio portfelio sudarymo metodo pagrindimas

Euristiniu metodu šiame straipsnyje vadinamas apytikslis pensijos portfelio sudėties nustatymo metodas, pagal kurį akcijų dalis portfelyje nustatoma remiantis populiariąja „100 minus investuotojo amžius“ taisykle. Tai reiškia, kad, pavyzdžiui, 35 % 65-erių metų asmens portfelio turėtų sudaryti akcijos, o likusią dalį – obligacijos ar kiti ne tokie rizikingi aktyvai.

Akcijų dalies mažinimo su amžiumi strategija turi galias tradicijas. Daug finansų valdymo patarėjų pataria su amžiumi mažinti akcijų dalį ir didinti obligacijų dalį portfelyje. Morris *et al.* (1995) sako, kad obligacijų dalis portfelyje turi būti ne didesnė nei asmens amžius. Panašiai Quinn (1991) teigia, kad jaunesni asmenys turi rinktis rizikingas investicijas. Malkiel (1996) savo knygoje kalba apie didesnę akcijų dalį individams ankstyvajame gyvenimo ciklo etape ir didesnę obligacijų dalį portfelyje artėjant pensijai. Jis teigia, kad kuo ilgesnis investicijų horizontas, tuo didesnė portfelyje turėtų būti akcijų dalis. Greninger *et al.* (2000) pažymėjo, kad finansų valdymo konsultantai dažniausiai pataria sumažinti rizikingų aktyvų dalį portfelyje likus trejiems–penkeriems metams iki pensijos laikotarpio pradžios.

Diversifikacijos laikui bėgant idėja yra ta, kad aktyvas ilguoju laikotarpiu yra mažiau rizikingas nei trumpuoju. Daugybė mokslininkų bandė išspręsti šią mįslę, dėl kurios nėra vieningos nuomonės iki šiol. Butler ir Domian (1991), Strong ir Taylor (2001) nustatė, kad rizika ilgėjant investicijų horizontui mažėja. Levy ir Spector (1996) nustatė, kad sudarant optimalų portfelį ilgam laikotarpiui akcijų dalis yra kur kas didesnė nei vienerių metų portfelyje. Bodie *et al.* (2002) teigia, kad rizikingo turto dalies didėjimas ilgėjant investicijų horizontui tėra iliuzija, o rizikingų ir nerizikingų aktyvų santykis portfelyje nepriklauso nuo investicijų horizonto.

Mukherji (2003), analizavęs optimalių portfelių sudėties priklausomybę nuo laukiamos galutinės portfelio vertės ir investicijų horizonto, nustatė, kad išdo vekseliai dominuoja trumpo laikotarpio investicijų portfeliuose su žema laukiama galutine portfelio verte. Vidutinės trukmės vyriausybės obligacijos yra pagrindinis investicijų objektas trumpo laikotarpio investicijoms, kai laukiama vidutinė portfelio vertė, bei vidutinio laikotarpio investicijoms, kai laukiama portfelio vertė žema arba vidutinė. Aukštos galutinės portfelio vertės atveju akcijos yra pagrindinis portfelio komponentas. Siekiant vidutinės ir aukštos galutinės portfelio vertės per ilgą investicijų laikotarpį, optimalų portfelį turėtų sudaryti vien smulkių įmonių akcijos.

Campbell ir Viceira (2002) parodė, kad statinė analizė ne tik netinkama teorinei analizei, bet ir gali vesti prie klaidingų išvadų praktikoje, kai investuotojas investuoja ilgą laikotarpį. Jie parodė, kad kintant realiai palūkanų normai su infliacija susietos obligacijos suteikia realią apsaugą nuo nominalių palūkanų normų kitimo. Dėl realių palūkanų normų neapibrėžtumo trumpalaikės investicijos ilgo horizonto investuotojui gali atrodyti rizikingos dėl nežinomų palūkanų normų reinvestavimo metu. Todėl optimali trumpo laikotarpio portfelio sudėtis gali būti skirtinga nuo optimalios ilgo laikotarpio portfelio sudėties.

Ankstyvi Samuelson (1969), Merton (1969) modeliai leido manyti, kad individai turėtų išlaikyti optimalią pastovią portfelio sudėtį per visą gyvenimą, tačiau šie modeliai rėmėsi prielaida, kad asmuo neturi darbo pajamų, t. y. žmogiškojo kapitalo. Ši prielaida nėra reali, nes dauguma žmonių turi žmogiškojo kapitalo. Žmogiškasis kapitalas apibūdinamas kaip ekonominė investuotojo pajamų ateityje dabartinė vertė. Boscailon (2004) nurodo, kad asmens turtas yra lygus finansinio kapitalo ir žmogiškojo kapitalo sumai. Optimali portfelio sudėtis priklausys nuo žmogiškojo kapitalo rizikos ir grąžos bei jo lankstumo, t. y. galimybės daryti jam įtaką.

Mokslininkai vis dažniau pripažįsta, kad tokios žmogiškojo kapitalo rizikos ir grąžos charakteristikos, kaip atlyginimo dydis ir pobūdis, turi būti įvertintos sudarant portfelį individualiam investuotojui. Ibbotson *et al.* (2007) teigia, kad portfelio sudėties pasirinkimo sprendimai glaudžiai susiję su žmogiškuoju kapitalu. Jaunesni investuotojai turi daugiau žmogiškojo kapitalo nei finansinio, nes jiems prieš akis dar daug metų plėtoti darbinę veiklą, mažai buvę laiko sukaupti finansinio turto. Ir atvirkščiai, vyresni žmonės daugiau turi finansinio turto negu žmogiškojo kapitalo, nes dirbti jiems likę nedaug laiko, tačiau per visą darbingą laikotarpį jie galėjo sukaupti didelį finansinį kapitalą.

Individo finansinio turto dalis, optimaliai investuojama į rizikingą turtą, turėtų mažėti su amžium dėl dviejų priežasčių. Pirmą, žmogiškasis kapitalas ne toks mažiau rizikingas nei akcijos, antra, žmogiškojo kapitalo dalis visoje individo turto struktūroje mažėja didėjant individo amžiui. Pavyzdžiui, ankstyvaisiais individo karjeros metais jo turte dominuoja palyginti saugus žmogiškasis kapitalas, tad norint išlaikyti optimalų viso turto rizikingumą, didelė dalis finansinio turto turi būti investuota į rizikingą turtą.

Kai žmogiškasis kapitalas traktuojamas kaip portfelio dalis, optimali portfelio sudėtis priklauso nuo koreliacijos tarp žmogiškojo kapitalo ir kitų turto klasių portfelyje. Campbell ir Viceira (2002) nustatė, kad nerizikingas žmogiškasis kapitalas lemia galimybę daugiau investuoti į rizikingas finansines priemones. Kai asmens pajamos stipriai svyruoja ir teigiamai koreliuoja su rizikingų aktyvų grąža, investuotojas turėtų rinktis saugesnes investicijas negu pensinio amžiaus žmogus be žmogiškojo kapitalo.

Kaip pabrėžia Ibbotson *et al.* (2007), kai visos kitos aplinkybės vienodos, dviejų individų, kurių pajamų projek-

cija ir laikotarpis iki pensijos vienodas, portfeliai neturėtų būti vienodi, jei jų žmogiškojo kapitalo rizikingumas skiriasi. Jie daro išvadą, kad „100 minus amžius“ taisyklė akcijų daliai portfelyje nustatyti negali būti taikoma modernaus turto valdymo kontekste. Tačiau jeigu pensijos laikotarpiu žmogiškojo kapitalo vertė tampa lygi nuliui, iškeliama hipotezė, kad euristinis metodas gali būti taikomas pensijos laikotarpiu portfelio sudėčiai nustatyti.

Apibendrinant galima pasakyti, kad pagal gyvenimo ciklo teoriją jauni žmonės su daugeliu metų darbinės veiklos prieš akis, išeisiantys į pensiją po ilgo laikotarpio, turėtų investuoti į rizikingus aktyvus. Su amžiumi rizikingos asmens investicijos tampa nebe tokios patrauklios dėl žmogiškojo kapitalo vertės sumažėjimo, finansinio turto vertės išaugimo, trumpesnio investicijų horizonto. Šiame straipsnyje dėmesys sutelkiamas į portfelio sudarymą pensijos laikotarpiu, kai žmogiškasis kapitalas nedaro įtakos portfelio sudėčiai. Tačiau esant daliniam užimtumui arba į pensiją išėjus vėliau, kai asmuo gauna darbinės pajamas, svarbu analizuoti ir žmogiškojo kapitalo poveikį rizikingo ir nerizikingo turto santykiui portfelyje.

Neigiama euristinio metodo ypatybė ta, kad vidutinė obligacijų dalis portfelyje yra pernelyg didelė, o tai gali lemti didesnę nei pageidaujama portfelio pereikvojimo tikimybę bei didesnę galutinę portfelio vertę paveldėtojams.

Dėl šios priežasties atsirado euristinio metodo modifikacijų, kurias vėlgi galima vadinti euristinėmis, apskaičiuotomis apytiksliai. Tarp tokių modifikuotų metodų yra Bengen (1996) akcijų daliai portfelyje nustatyti taikoma „115 minus investuotojo amžius“ konservatyviam investuotojui, „128 minus investuotojo amžius“ nuosaikiam investuotojui, „140 minus investuotojo amžius“ agresyviai investuotojui, Smith ir Gould (2007) obligacijų dalies portfelyje nustatymo taisyklė „investuotojo amžius minus 25“ arba „investuotojo amžius minus 35“ strategija, Leimberg *et al.* (2007) akcijų daliai nustatyti taikoma „110 minus investuotojo amžius“ taisyklė ir kt.

#### 4. Euristinio metodo taisyklės stochastinis optimizavimas

Ankstesniuose autoriaus atliktuose tyrimuose stochastinio optimizavimo būdu buvo bandoma nustatyti optimalią akcijų dalį portfelyje tiek pastoviam planuojamam pensijos laikotarpiui, tiek esant stochastinei asmens gyvenimo trukmei. Pastovi akcijų dalis portfelyje reiškia, kad jei optimali, t. y. užtikrinanti minimalią portfelio pereikvojimo tikimybę pensijos laikotarpiu, akcijų dalis yra ypač didelė, asmuo kasmet rebalansuoja portfelį, išlaikydamas optimalų akcijų ir obligacijų santykį. Net ir itin rizikos nebijantiems asmenims didelė akcijų dalis portfelyje pensijos laikotarpio pabaigoje nėra priimtina. Tam tikslui ir siekiant rasti strategiją, efektyvesnę negu stochastinio optimizavimo metodas su pastovia akcijų dalimi, naudojantis dinaminio stochasti-

nio imitacinio modeliavimo ir stochastinio optimizavimo galimybėmis atliktas euristinio metodo taisyklės akcijų daliai portfelyje nustatyti stochastinis optimizavimas.

#### 4.1. Tyrimo metodika

Tyrimo tikslui įgyvendinti sudarytas dinaminis stochastinis imitacinis modelis, kuriame hipotetinis 65-erių metų asmuo išėjo į pensiją ir turi sukaupęs tam tikrą sumą pinigų, pensijos laikotarpį asmuo pradeda išimdamas iš portfelio tam tikrą sumą, o likutį investuoja į akcijas ir vidutinės trukmės vyriausybės obligacijas tam tikru santykiu, nustatydamas jį pagal euristinį metodą. Kiekvienais paskesniais metais akcijų dalis portfelyje rebalansuojama mažinant ją 1 procentiniu punktu. Akcijų ir obligacijų grąža modelyje – stochastiniai dydžiai. Asmuo siekia, kad portfelio pakaktų planuojamam pensijos laikotarpiui. Nagrinėjami 3,0 %, 3,5 %, 4,0 %, 4,5 %, 5,0 %, 5,5 %, 6,0 %, 6,5 %, 7,0 %, 7,5 %, 8,0 %, 8,5 %, 9,0 %, 9,5 %, 10,0 % išėmimo normos taikymo atvejai. Kasmet iš portfelio išimama suma laikoma pakoreguota pagal infliaciją, nes modelyje naudojamos realios turto klasių grąžos. Išėmimo norma yra fiksuota ir nekinta per nagrinėjamą pensijos laikotarpį.

Nagrinėjamą hipotetinį portfelį sudaro dvi turto klasės: akcijos ir vidutinės trukmės JAV vyriausybės obligacijos. Šių turto klasių metinės realios grąžos atsitiktinai generuojamos taikant modelį, išlaikant istorinę koreliaciją tarp akcijų ir vidutinės trukmės JAV vyriausybės obligacijų. Modelio parametrams nustatyti analizuojami 1926–2009 metų istoriniai akcijų ir vidutinės trukmės JAV vyriausybės obligacijų grąžų duomenys. Sudarant modelį daroma prielaida, kad turto klasių vienerių metų kaupimo daugikliai pasiskirstę lognormaliai. Ši prielaida patikrinta skaičiuojant istorines logaritmines grąžas bei Kolmogorovo ir Smirnovio testu tikrinant, ar minėtų grąžų skirstiniai skiriasi nuo normalaus pasiskirstymo. Į modelį įtrauktų atsitiktinių dydžių atsitiktiniai pasiskirstymai buvo modeliuoti LHS (*Latin Hypercube Sampling*) metodu. Remiantis imitaciniu modeliu, generuojant atsitiktinius dydžius, bei nparametrinio Kolmogorovo–Smirnovio Z testo rezultatais daroma prielaida, kad naudojantis istoriniais duomenimis nustatyti akcijų ir obligacijų kaupimo daugiklių skirstinių parametrai tinkamai apibūdina galimas ateities turto klasių realių grąžų trajektorijas.

Dinaminiai stochastiniai imitaciniai modeliai turi du būsenos kintamuosius: „LYGUS 0“, tikrinantis, ar portfelio vertė netampa lygi nuliui, ir „GYVAS“, nusakantis, ar asmuo laikotarpiu  $t$  dar yra gyvas.

Pagal LR draudimo priežiūros komisijos parengtas Lietuvos gyventojų mirtingumo lenteles naudojant binominį skirstinį kiekvienais pensijos laikotarpio metais modeliuojama tikimybė išgyventi dar vienerius. Priklausomai nuo atitinkamų metų statistinės tikimybės, būsenos kintamasis „GYVAS“ įgyja reikšmes „teisinga“ arba „klaidinga“. Modelyje daroma prielaida, kad tikimybė išgyventi dar vie-

nerius metus nuo 55 iki 60 metų lygi 1 (būsenos kintamasis „GYVAS“ visuomet įgis reikšmę „teisinga“), o išgyvenimo tikimybė daugiau 101 metus visuomet lygi 0 (būsenos kintamasis „GYVAS“ visuomet įgis reikšmę „klaidinga“).

Stochastinio optimizavimo metu naudojamas Box metodas. Optimizuojamas kintamasis, pavadintas „TAISYKLĖ“. Sudarytu modeliu siekiama sužinoti, koks yra optimalus skaičius, iš kurio atėmus žmogaus amžių tam tikrais metais, nustatoma kiekvieniems metams akcijų dalis (kasmet mažinama 1 procentiniu punktu). Optimizuojamas kintamasis tokiaime modelyje priklausomas nuo asmens amžiaus pensijos laikotarpio pradžioje, išėmimo normos, stochastinių akcijų ir obligacijų grąžų, o stochastinės gyvenimo trukmės atveju ir nuo šio veiksnio. Stochastinio optimizavimo metu minimizuojama portfelio pereikvojimo tikimybė. Statinio optimizavimo modelis turi dinaminį stochastinį imitacinį modelį, kurio kiekvienu atveju stebima 20 000 realizacijų.

Modelyje nesudaroma galimybė skolintis, portfelio vertė niekada nebūna mažesnė už nulį, o akcijų ir obligacijų dalys – tik teigiamieji dydžiai, kurių suma visada lygi 100 %. Todėl optimizuojamo kintamojo optimalios vertės ieškoma pastovaus 25-erių metų laikotarpio atveju [90;165] intervale, o stochastinės gyvenimo trukmės modelio atveju – [100;165] intervale. Optimalių reikšmių ieškoma tik tarp sveikųjų skaičių.

Stochastinio optimizavimo metu gautos optimalios taisyklės toliau testuojamos naudojant tam tikslui parengtu dinaminį stochastiniu imitaciniu modeliu, taip gaunant vidutinės portfelio pereikvojimo tikimybės ir jos standartinio nuokrypio statistikas, taip pat ir vidutinio galutinės ir pradinės pensijos portfelio vertės santykio bei jo standartinio nuokrypio statistikas. Minėtos statistikos nustatomos skirtingoms išėmimo normoms atskirai. Kiekvienu atveju skaičiuojama 20 000 realizacijų.

Gauti stochastinio optimizavimo su pastoviu planuojamu pensijos laikotarpiu rezultatai vėliau buvo testuojami su istoriniais duomenimis. Kiekvieno tiriamo istorinio laikotarpio pradžioje buvo atliekamas stochastinis modelio su pastoviu planuojamu pensijos laikotarpiu (nesant galimybės naudoti tikslius istorinius mirtingumo lentelių duomenis) optimizavimas, siekiant nustatyti optimalią taisyklę, pagal kurią bus nustatoma portfelio sudėtis visą nagrinėjamą laikotarpį. Modelio parametrams (akcijų ir obligacijų skirstinių charakteristikoms) nustatyti buvo naudojami visi iki to laikotarpio pradžios turimi akcijų ir obligacijų realių metinių grąžų duomenys. Visais laikotarpiais laikomasi prielaidos, kad akcijų ir obligacijų kaupimo daugikliai yra pasiskirstę lognormaliai. Portfelio augimas skaičiuojamas remiantis istoriniais tų metų grąžų duomenimis.

#### 4.2. Tyrimo rezultatai

1 lentelėje pateikti stochastinio optimizavimo, atlikto siekiant nustatyti pakoreguotą optimalią euristinio metodo taisyklę akcijų daliai portfelyje apskaičiuoti, rezultatai.



1 lentelė. Optimali taisyklė portfelio sudėčiai nustatyti

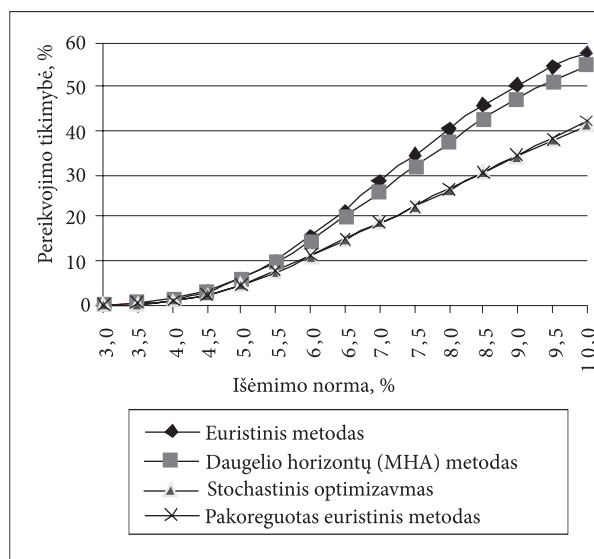
Table 1. Optimal rule to determine asset allocation

Išėmimo norma, %	Optimali taisyklė	Vidutinė portfelio pereikvojimo tikimybė, %
3,0	101	0,05
3,5	112	0,25
4,0	110	0,95
4,5	120	2,34
5,0	127	4,71
5,5	131	7,84
6,0	140	11,26
6,5	149	15,05
7,0	158	18,74
7,5	165	22,48
8,0	165	26,50
8,5	165	30,33
9,0	165	34,24
9,5	165	38,18
10,0	165	41,97

Tradicinė „100 minus amžius“ taisyklė arti optimalios tik tuomet, kai 65-erių metų asmuo kasmet iš portfelio išima 3,0 % pradinės portfelio vertės. Išimant iš portfelio 7,5 % pradinės portfelio vertės ir daugiau kasmet optimali taisyklė akcijų daliai nustatyti būtų „165 minus amžius“. Didėjant išėmimo normai didėja ir portfelio pereikvojimo tikimybė.

1 pav. pateikiamas portfelių, sudarytų 65-erių metų asmeniui su stochastine gyvenimo trukme skirtingais metodais, pereikvojimo tikimybės. Stochastinis optimizavimas užtikrina, kad portfelio pereikvojimo tikimybė bus minimali ir esant aukštesnėms išėmimo normoms gero kai mažesnė nei tradiciniu euristiniu metodu ar daugelio horizontų metodu sudarytų portfelių. Pastebima tai, kad pakoreguotu euristiniu metodu (optimalios taisyklės) sudaryto portfelio pereikvojimo tikimybė kiek didesnė nei stochastinio optimizavimo būdu sudaryto portfelio. Verta atminti, kad pakoreguoto euristinio metodo atveju akcijų dalis kasmet mažinama, o stochastinio optimizavimo būdu sudaryto portfelio atveju išlieka pastovi, taip užtikrindama minimalią portfelio pereikvojimo galimybę.

Pereikvojimo tikimybės panašios, tačiau iš esmės skiriasi portfelio sudėtis. 2 pav. parodyta, kaip skiriasi tradiciniu euristiniu metodu ir stochastinio optimizavimo būdu sudarytų portfelių sudėtis pastovaus akcijų ir obligacijų santykio atveju ir nustatant portfelio sudėtį pakoreguotu euristiniu metodu pagal optimalią taisyklę. 2 pav. nagrinėjamas



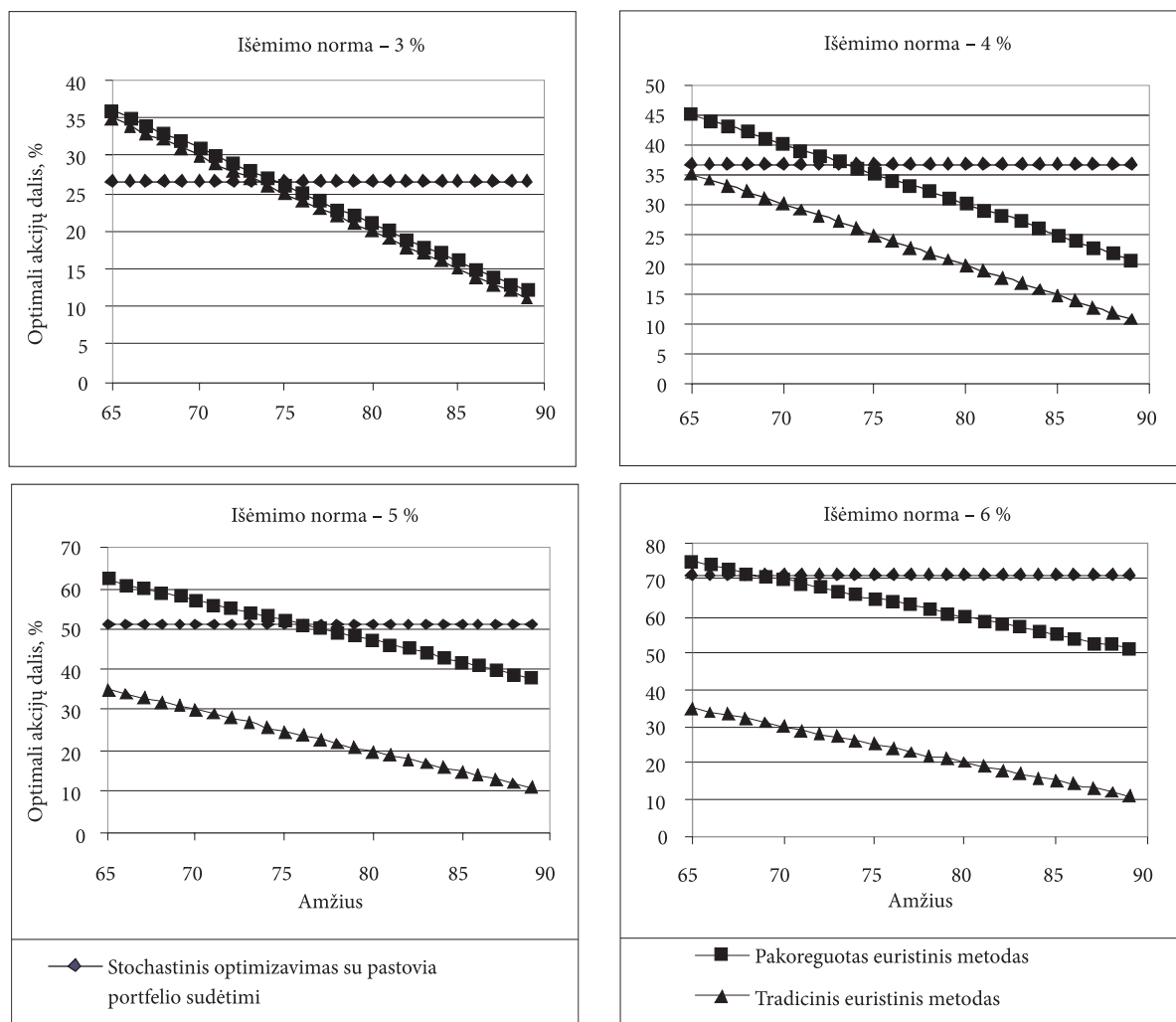
1 pav. Portfelio pereikvojimo tikimybė, esant stochastinei gyvenimo trukmei, kai asmeniui 65-eri metai

Fig. 1. Probability of retirement portfolio ruin with stochastic lifetime of 65 years old persons

modelis su stochastine gyvenimo trukme. Pakoreguotu euristiniu metodu nustatyta akcijų dalis portfelyje pirmiaisiais pensijos laikotarpio metais yra aukštesnė nei pastovios portfelio sudėties atveju ir kasmet mažėja vienu procentiniu punktu. Paskutiniiais pensijos laikotarpio metais akcijų dalis portfelyje yra kur kas mažesnė nei būtų pastovios portfelio sudėties atveju. Kaip jau minėta, portfelio pereikvojimo tikimybė taikant pakoreguotą euristinį metodą tik nedaug padidėja, palyginti su portfelio, kurio sudėtis laikui bėgant nekinta, pereikvojimo tikimybė.

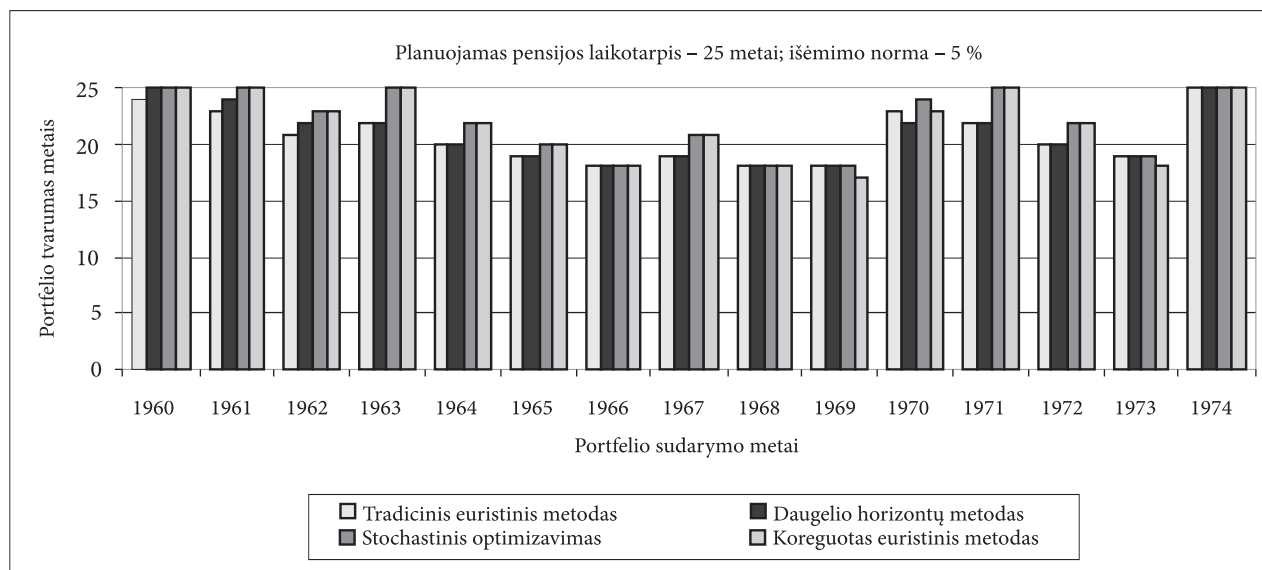
Pakoreguotam euristiniam metodui testuoti su istoriniais duomenimis pasirinktas 1960–1974 m. laikotarpis, nes šiuo laikotarpiu sudarytų portfelių tvarumas mažesnis negu kitais laikotarpiais sudarytų portfelių. 3 pav. pateikiamas skirtingais metodais sudarytų portfelių tvarumas. Planuojamas pensijos laikotarpis lygus 25-eriems metams. Taikoma 5 % pradinės portfelio vertės išėmimo norma. Kaip matyti iš paveikslų, koreguotu euristiniu metodu sudarytų portfelių tvarumas būtų buvęs panašus, lyginant su stochastinio optimizavimo būdu nustatyto portfelio su pastoviu akcijų ir obligacijų santykiu tvarumu. Šiuo požiūriu stochastinio optimizavimo būdu sudaryti portfeliai tiek pastovios akcijų dalies, tiek kasmet vienu procentiniu punktu mažėjančios akcijų dalies atveju būtų pranašesni už tradiciniu euristiniu metodu ar daugelio horizontų metodu sudarytus portfelius.

Galutinė portfelio vertė po 25-erių metų šiuo laikotarpiu yra dažniausiai lygi nuliui, tačiau tais metais, kai portfelis yra pakankamas viso planuojamo laikotarpio išėmimams finansuoti, koreguotas euristinis metodas lemia didesnę galutinę portfelio vertę. Todėl šiuo būdu sudarius portfelį asmuo būtų gavęs didesnę naudą.



2 pav. Akcijų dalis portfelyje

Fig. 2. Stock share in the portfolio



3 pav. Portfelijų tvarumo palyginimas

Fig. 3. Comparison of retirement portfolios sustainability

## 5. Išvados

Atlikti pensijos portfelio sudarymo metodų tyrimai parodė, kad stochastinio optimizavimo būdu sudaryti portfeliai tvarumo požiūriu yra patys efektyviausi – šių portfelių poreikvojimo tikimybė yra minimali, tačiau tai pasiekama itin didelės akcijų dalies portfelyje sąskaita. Siekiant išvengti didelės akcijų dalies portfelyje rekomenduojama taikyti dinaminio stochastinio modeliavimo ir stochastinio optimizavimo būdu sudarytą pakoreguotą euristinį metodą, kuriuo sudarytų portfelių poreikvojimo tikimybė kiek didesnė nei pastovios optimalios akcijų dalies atveju, tačiau vidutinė akcijų dalis pensijos laikotarpiu yra mažesnė.

## Literatūra

- Ameriks, J.; Veres, R.; Warshawsky, M. J. 2001. Making retirement income last a lifetime, *Journal of Financial Planning* 14: 60–76.
- Bengen, W. P. 1994. Determining withdrawal rates using historical data, *Journal of Financial Planning* 7(4): 171–180.
- Bengen, W. P. 1996. Asset allocation for a lifetime, *Journal of Financial Planning* 9(4): 58–67.
- Bengen, W. P. 2001. Conserving client portfolios during retirement, part IV, *Journal of Financial Planning* 14: 110–119.
- Bodie, Z.; Kane, A.; Marcus, A. 2002. *Investments*. Fifth edition. McGraw-Hill Higher Education. 1015 p. ISBN 0-07-233916-0.
- Boscaljon, B. 2004. Time, wealth, and human capital as determinants of asset allocation, *Financial Services Review* 13(3): 167–184.
- Butler, K. C.; Domian, D. L. 1991. Risk, Diversification, and the Investment Horizon, *Journal of Portfolio Management* 17: 41–47. doi:10.3905/jpm.1991.409334
- Campbell, J. Y.; Viceira, L. M. 2002. *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-term Investors*. New York: Oxford University Press. 272 p. ISBN 0-19-829694-0.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 1998. Retirement savings: Choosing a withdrawal rate that is sustainable, *Journal of the American Association of Individual Investors* 20: 16–21.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 1999. Sustainable Withdrawal rates from your retirement portfolio, *Financial Counseling and Planning* 10(1): 39–47.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 2001. Withdrawing money from your retirement portfolio without going broke, *Journal of Retirement Planning* 4(4): 35–41.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. 2003. A comparative analysis of retirement portfolio success rates: simulation versus overlapping periods, *Financial Services Review* 16: 115–128.
- Greninger, S. A.; Hampton, V. L.; Kitt, K. A.; Jacquet, S. 2000. Retirement planning guidelines: a Delphi study of financial planner and educators, *Financial Services Review* 9: 231–245. doi:10.1016/S1057-0810(01)00069-5
- Ho, K.; Milevsky, M. A.; Robinson, C. 1994. Asset allocation, life expectancy, and shortfall, *Financial Services Review* 3(2): 109–126. doi:10.1016/1057-0810(94)90017-5
- Ibbotson, R. G.; Milevsky, M. A.; Chen, P.; Zhu, K. X. 2007. *Lifetime Financial Advice: Human Capital, Asset Allocation, and Insurance*. The Research Foundation of CFA Institute. 95 p. ISBN 978-0-943205-94-6.
- Leimberg, S. R.; Baldwin, Jr.; Coates, A. S.; Keebler, S.; Kitces, M. E.; Benjamin, G. 2007. *Tools and Techniques of Retirement Income Planning*. First Edition. The National Underwriter Company. 368 p. ISBN 978-0-872189-22-5.
- Levy, H.; Spector, Y. 1996. Cross-Asset versus time diversification, *Journal of Portfolio Management* 22: 24–34. doi:10.3905/jpm.1996.409551
- Malkiel, B. G. 1996. *A Random Walk Down Wall Street*. 6th edition. New York: W. W. Norton & Company. 522 p. ISBN 0-39-331529-0.
- Merton, R. C. 1969. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case, *Review of Economics and Statistics* 51: 247–257. doi:10.2307/1926560
- Milevsky, M. A.; Ho, K.; Robinson, C. 1997. Asset allocation via the conditional first exit time or how to avoid outliving your money, *Review of Quantitative Finance and Accounting* 9: 53–70. doi:10.1023/A:1008278910581
- Milevsky, M. E.; Robinson, C. 2005. A sustainable spending rate without simulation, *Financial Analysts Journal* 61: 89–100. doi:10.2469/faj.v61.n6.2776
- Mitchell, J. B. 2009. *Withdrawal Rate Strategies for Retirement Portfolios: Preventive Reductions and Risk Management* [interaktyvus], [žiūrėta 2010 m. gegužės 23 d.]. Prieiga per internetą: <http://ssrn.com/abstract=1489657>.
- Morris, K. M.; Siegel, A. M.; Morris, V. B. 1995. *The Wall Street Journal Guide to Planning Your Financial Future*. New York: Lightbulb Press. 160 p. ISBN 0-68-480202-3.
- Mukherji, S. 2003. Optimal portfolios for different holding periods and target returns, *Financial Services Review* 72: 61–71.
- Quinn, J. B. 1991. *Making the Most of Your Money: Smart Ways to Create Wealth and Plan Your Finances in the '90s*. New York: Simon and Schuster. 934 p. ISBN 0-67-165952-9.
- Samuelson, P. A. 1969. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming, *Review of Economics and Statistics* 51(3): 239–246. doi:10.2307/1926559
- Smith, G.; Gould, D. P. 2007. Measuring and Controlling Shortfall risk in retirement, *The Journal of Investing* 16(1): 82–95. doi:10.3905/joi.2007.681826
- Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. 2007. Guidelines for withdrawal rates and portfolio safety during retirement, *Journal of Financial Planning* 20: 52–59.
- Stout, R. G. 2008. Stochastic optimization of retirement portfolio asset allocations and withdrawals, *Financial Services Review* 17(1): 1–15.
- Stout, R. G.; Mitchell, J. B. 2006. Dynamic retirement withdrawal planning, *Financial Services Review* 15(2): 117–131.
- Strong, N.; Taylor, N. 2001. Time diversification: empirical tests, *Journal of Business Finance and Accounting* 28: 263–302. doi:10.1111/1468-5957.00374
- Terry, R. L. 2003. The relationship between portfolio composition and sustainable withdrawal rates, *Journal of Financial Planning* 16(5): 64–78.
- Tezel, A. 2004. Sustainable retirement withdrawals, *Journal of Financial Planning* 17(7): 52–57.
- Weiss, G. R. 2001. Dynamic rebalancing, *Journal of Financial Planning* 14(2): 100–106.